Solucionario Detallado

Selección de 10 Ejercicios Clave

camilomath.xyz

Álgebra y Trigonometría

Introducción

A continuación se presentan las soluciones paso a paso de los ejercicios seleccionados. Este material ha sido preparado exclusivamente para los estudiantes de **camilomath.xyz**.

Ejercicio 1: Crecimiento Exponencial (Bacterias)

Fuente: Cap. 7, Ejercicio 7.5.

El número de bacterias en un cultivo está dado por la fórmula $n(t) = 500e^{0,45t}$, donde t se mide en horas.

a) ¿Cuál es la tasa relativa de crecimiento de la población?

b) ¿Cuál es la población inicial del cultivo?

c) ¿Cuántas bacterias contiene el cultivo en $t = 5$?

Solución:

a) Tasa relativa de crecimiento: El modelo estándar de crecimiento exponencial es $n(t) = n_0e^{rt}$. Al comparar con $n(t) = 500e^{0,45t}$, identificamos r directamente en el exponente.

$$r = 0{,}45 \implies \text{La tasa es del } 45\,\% \text{ por hora.}$$

b) Población inicial ($t = 0$): Evaluamos la función en $t = 0$:

$$n(0) = 500e^{0,45(0)} = 500e^{0} = 500(1) = 500$$

La población inicial es de **500 bacterias**.

c) Población en $t = 5$: Sustituimos $t = 5$ en la fórmula:

$$n(5) = 500e^{0,45(5)} = 500e^{2,25}$$

Calculando el valor de la potencia ($e^{2,25} \approx 9{,}4877$):

$$n(5) \approx 500(9{,}4877) \approx 4743{,}86$$

Redondeando al entero más cercano: **4,744 bacterias**.

Ejercicio 2: Funciones Inversas y Composición

Fuente: Parcial 4, Ejercicio 1.
Dada la tabla de $f(x)$ y puntos de la gráfica de $g(x)$, determine: $(g^{-1} \circ f^{-1})(2)$.
Datos clave extraídos:

- Tabla $f(x)$: $f(5) = 2$ (el par es $(5, 2)$).
- Gráfica $g(x)$: Contiene el punto $(3, 5)$.

Solución:

La expresión a calcular es $(g^{-1} \circ f^{-1})(2)$, que equivale a $g^{-1}(f^{-1}(2))$.

Paso 1: Calcular $f^{-1}(2)$ Buscamos en la tabla de $f(x)$ qué valor de entrada x produce un resultado de $y = 2$.

$$\text{En la tabla vemos que } f(5) = 2 \implies f^{-1}(2) = 5$$

Paso 2: Calcular $g^{-1}(5)$ Tomamos el resultado anterior (5) como entrada para g^{-1}. Esto significa buscar en la gráfica de $g(x)$ qué punto tiene coordenada $y = 5$.

$$\text{En la gráfica observamos el punto } (3, 5).$$

$$\text{Esto implica que } g(3) = 5 \implies g^{-1}(5) = 3$$

Respuesta Final: $(g^{-1} \circ f^{-1})(2) = 3$.

Ejercicio 3: Ecuación Exponencial Cuadrática

Fuente: Cap. 7, Ejercicio 7.29.
Resuelva la ecuación: $4^x - 2^x - 12 = 0$.

Solución:

Reescribimos la base 4 como 2^2:

$$(2^2)^x - 2^x - 12 = 0 \implies (2^x)^2 - 2^x - 12 = 0$$

Realizamos un cambio de variable (sustitución). Sea $u = 2^x$. La ecuación se convierte en:

$$u^2 - u - 12 = 0$$

Factorizamos buscando dos números que multiplicados den -12 y sumados -1:

$$(u - 4)(u + 3) = 0$$

Las soluciones para u son $u_1 = 4$ y $u_2 = -3$. Volvemos a la variable original x:

1. Para $u = 4$:

$$2^x = 4 \implies 2^x = 2^2 \implies x = 2$$

2. Para $u = -3$:

$$2^x = -3$$

Esta parte **no tiene solución real** porque una potencia positiva nunca da un resultado negativo.

Respuesta: $x = 2$.

Ejercicio 4: Sistema de Ecuaciones Logarítmicas

Fuente: Cap. 7, Ejercicio 7.30.
Resuelva el siguiente sistema:

$$\begin{cases} xy = 10^{10} \\ y^{\log x} = 10^{25} \end{cases}$$

Solución:

Aplicamos logaritmo en base 10 (log) a ambas ecuaciones.

Ecuación 1:

$$\log(xy) = \log(10^{10}) \implies \log x + \log y = 10$$

Ecuación 2:

$$\log(y^{\log x}) = \log(10^{25}) \implies (\log x)(\log y) = 25$$

Ahora tenemos un sistema algebraico simple. Sean $u = \log x$ y $v = \log y$:

$$\begin{cases} u + v = 10 \\ u \cdot v = 25 \end{cases}$$

Esto corresponde a encontrar dos números que sumados den 10 y multiplicados den 25.

$$v = 10 - u$$

Sustituimos en la multiplicación:

$$u(10 - u) = 25 \implies 10u - u^2 = 25 \implies u^2 - 10u + 25 = 0$$

$$(u - 5)^2 = 0 \implies u = 5$$

Si $u = 5$, entonces $v = 10 - 5 = 5$. Recuperamos x e y:

$$\log x = 5 \implies x = 10^5$$

$$\log y = 5 \implies y = 10^5$$

Respuesta: $x = 100,000$, $y = 100,000$.

Ejercicio 5: Logaritmos Anidados

Fuente: Cap. 7, Ejercicio 7.22 b).
Resuelva para x: $\log_2(\log_3(\log_3 x)) = 0$.

Solución:

Resolvemos desde afuera hacia adentro usando la definición de logaritmo ($y = \log_b A \iff b^y = A$).

1. Eliminamos el $\log_2$ exterior:

$$\log_3(\log_3 x) = 2^0 \implies \log_3(\log_3 x) = 1$$

2. Eliminamos el siguiente $\log_3$:

$$\log_3 x = 3^1 \implies \log_3 x = 3$$

3. Despejamos x:

$$x = 3^3 \implies x = 27$$

Respuesta: $x = 27$.

Ejercicio 6: Inversa de Función Racional

Fuente: Parcial 4, Ejercicio 2.
Dada $f(x) = \frac{-5+x}{3x-2}$, encuentre $f^{-1}(x)$.

Solución:

1. Escribimos $y = f(x)$:

$$y = \frac{x-5}{3x-2}$$

2. Intercambiamos las variables x e y para hallar la inversa:

$$x = \frac{y-5}{3y-2}$$

3. Despejamos la nueva variable y:

$$x(3y-2) = y - 5$$

$$3xy - 2x = y - 5$$

Agrupamos los términos con y en el lado izquierdo:

$$3xy - y = 2x - 5$$

Factorizamos y:

$$y(3x - 1) = 2x - 5$$
$$y = \frac{2x - 5}{3x - 1}$$

Respuesta: $f^{-1}(x) = \frac{2x-5}{3x-1}$.

Ejercicio 7: Logaritmo con Base Variable

Fuente: Cap. 7, Ejercicio 7.33.
Resuelva para x: $\log_x 8 + \log_x(x - 1) = 2$.

Solución: Restricciones: $x > 0, x \neq 1$ y $x - 1 > 0 \implies x > 1$.

Usamos la propiedad de suma de logaritmos:

$$\log_x(8(x - 1)) = 2$$

Convertimos a forma exponencial:

$$x^2 = 8(x - 1)$$
$$x^2 = 8x - 8 \implies x^2 - 8x + 8 = 0$$

Usamos la fórmula cuadrática:

$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(1)(8)}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{32}}{2}$$

Simplificamos $\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$:

$$x = \frac{8 \pm 4\sqrt{2}}{2} = 4 \pm 2\sqrt{2}$$

Analizamos la validez: $x_1 = 4 + 2\sqrt{2} \approx 6{,}8$ (Válido). $x_2 = 4 - 2\sqrt{2} \approx 1{,}17$ (Válido, ya que es > 1).

Respuesta: $x = 4 \pm 2\sqrt{2}$.

Ejercicio 8: Sistema Lineal y Logarítmico Mixto

Fuente: Cap. 7, Ejercicio 7.23.
Resuelva el sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ \log(2x - y) + \log(2x + 2y) = 1 \end{cases}$$

Solución:

Trabajamos la segunda ecuación:

$$\log((2x-y)(2x+2y)) = 1 \implies (2x-y)(2x+2y) = 10$$

Factorizamos un 2 del segundo término:

$$(2x-y)\cdot 2(x+y) = 10 \implies (2x-y)(x+y) = 5$$

De la primera ecuación ($2x+3y=13$), despejamos $2x = 13-3y$. Sustituimos en la ecuación transformada:

$$((13-3y)-y)\left(\frac{13-3y}{2}+y\right) = 5$$
$$(13-4y)\left(\frac{13-3y+2y}{2}\right) = 5$$
$$(13-4y)(13-y) = 10$$
$$169-13y-52y+4y^2 = 10 \implies 4y^2-65y+159 = 0$$

Resolviendo la cuadrática, obtenemos $y_1 = 3$ y $y_2 = 13{,}25$. Si probamos $y = 3$ en la primera ecuación original: $2x+9 = 13 \implies x = 2$. Verificamos argumentos de logs: $2(2)-3 = 1$ (positivo) y $2(2)+6 = 10$ (positivo).

Respuesta: $x = 2, y = 3$.

Ejercicio 9: Ecuación con Raíces y Logaritmos

Fuente: Cap. 7, Ejercicio 7.24 a).
Resuelva: $\frac{\log\sqrt{x+1}+1}{\log\sqrt[3]{x-40}} = 3$

Solución: Restricción: $x > 40$. Pasamos el denominador a multiplicar y expresamos raíces como exponentes fraccionarios:

$$\log((x+1)^{1/2})+1 = 3\log((x-40)^{1/3})$$
$$\frac{1}{2}\log(x+1)+1 = 3\cdot\frac{1}{3}\log(x-40)$$
$$\frac{1}{2}\log(x+1)+1 = \log(x-40)$$

Multiplicamos todo por 2 y reescribimos 2 como $\log(100)$:

$$\log(x+1)+2 = 2\log(x-40)$$

$$\log(x+1)+\log(100) = \log((x-40)^2)$$
$$\log(100(x+1)) = \log((x-40)^2)$$

Igualando argumentos:

$$100x + 100 = x^2 - 80x + 1600$$

$$x^2 - 180x + 1500 = 0$$

Resolviendo la cuadrática, $x \approx 171{,}24$ y $x \approx 8{,}76$. Descartamos 8.76 por ser menor a 40. **Respuesta exacta:** $x = 90 + 20\sqrt{66}$.

Ejercicio 10: Desintegración Radiactiva

Fuente: Cap. 7, Ejercicio 7.11.
Si 250 mg de un elemento radiactivo se desintegran hasta 200 mg en 48 horas, determine la vida media del elemento.

Solución: Modelo: $m(t) = m_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{t/H}$.

$$200 = 250(0{,}5)^{48/H} \implies 0{,}8 = (0{,}5)^{48/H}$$

Aplicamos logaritmo natural:

$$\ln(0{,}8) = \frac{48}{H} \ln(0{,}5)$$

$$H = \frac{48 \ln(0{,}5)}{\ln(0{,}8)} \approx \frac{48(-0{,}693)}{-0{,}223} \approx 149{,}12$$

Respuesta: La vida media es de aproximadamente **149 horas**.